

# Existence et unicité d'une courbe à courbure positive maximisant le minimum du rayon de courbure

GTD, INSA de Lyon, ICJ

Jérôme Bastien

LIBM (ex Centre de Recherche et d'Innovation sur le Sport) – Université Lyon I

14 novembre 2019

# Résumé

On considère l'ensemble  $\mathcal{E}$  des courbes à courbure algébrique positive, dont les extrémités et les tangentes en leurs extrémités sont données. À chacune des courbes de  $\mathcal{E}$ , on associe le minimum du rayon de courbure algébrique. Il existe une unique courbe de  $\mathcal{E}$  qui maximise ce minimum et cette courbe est égale à l'unique courbe de  $\mathcal{E}$ , formée d'un arc de cercle et d'un segment de droite, éventuellement réduit à un point. Cette courbe correspond aussi à un cas particulier des courbes de Dubins et sera utilisée pour améliorer la conception d'une pièce intervenant dans un brevet.

# Sommaire

- 1 Contexte et Intérêt
- 2 Énoncé du problème
- 3 Unique courbe de  $\mathcal{E}$  formée d'un segment de droite et d'un arc de cercle
- 4 Problème de minimisation
- 5 Existence, unicité et caractérisation de la courbe minimisant le maximum de la courbure

# Sommaire

- 1 Contexte et Intérêt
- 2 Énoncé du problème
- 3 Unique courbe de  $\mathcal{E}$  formée d'un segment de droite et d'un arc de cercle
- 4 Problème de minimisation
- 5 Existence, unicité et caractérisation de la courbe minimisant le maximum de la courbure

# Contexte et Intérêt

- Le brevet [Bas12];
- [http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/expose\\_MMI\\_2015.pdf](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_MMI_2015.pdf).

Intérêt :

- ludique avant tout !
- pédagogique [Bas15a ; Bas15b ; Bas16d ; Bas16a];
- objets de recherche :
  - 1 Dénombrement, proche des polygones auto-évitant [Bas16b ; Bas16c];
  - 2 Maximisation de rayon de courbure [Bas19].

## Contexte et Intérêt

- Le brevet [Bas12];
- [http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/expose\\_MMI\\_2015.pdf](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_MMI_2015.pdf).

Intérêt :

- ludique avant tout !
- pédagogique [Bas15a ; Bas15b ; Bas16d ; Bas16a];
- objets de recherche :
  - 1 Dénombrement, proche des polygones auto-évitant [Bas16b ; Bas16c];
  - 2 Maximisation de rayon de courbure [Bas19].

# Contexte et Intérêt

- Le brevet [Bas12];
- [http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/expose\\_MMI\\_2015.pdf](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_MMI_2015.pdf).

Intérêt :

- ludique avant tout !
- pédagogique [Bas15a ; Bas15b ; Bas16d ; Bas16a];
- objets de recherche :
  - 1 Dénombrement, proche des polygones auto-évitant [Bas16b ; Bas16c];
  - 2 Maximisation de rayon de courbure [Bas19].

# Sommaire

- 1 Contexte et Intérêt
- 2 Énoncé du problème
- 3 Unique courbe de  $\mathcal{E}$  formée d'un segment de droite et d'un arc de cercle
- 4 Problème de minimisation
- 5 Existence, unicité et caractérisation de la courbe minimisant le maximum de la courbure

# Problématique

Il a donc été nécessaire de construire une courbe passant par deux points  $A$  et  $B$  du plan, dont les directions des tangentes en  $A$  et  $B$  sont données en étant non parallèles.

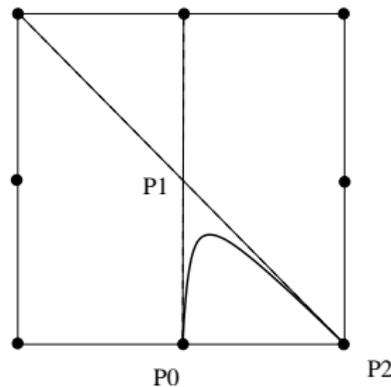
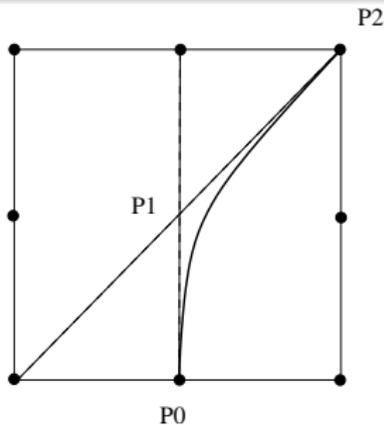
La courbe choisie est une parabole, ou de façon équivalente, une courbe de Bézier

# Problématique

Il a donc été nécessaire de construire une courbe passant par deux points  $A$  et  $B$  du plan, dont les directions des tangentes en  $A$  et  $B$  sont données en étant non parallèles.

La courbe choisie est une parabole, ou de façon équivalente, une courbe de Bézier

# Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)

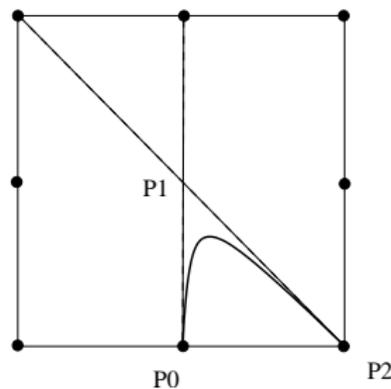
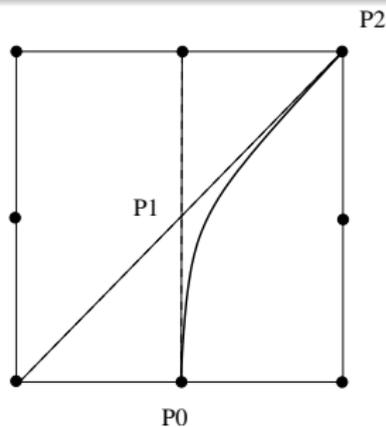


Courbe de Bézier d'ordre  $n = 2$ , définie par trois points de contrôle  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ , passant par  $P_0$  et  $P_2$ , dont les dérivées en ces points sont portées par  $\overrightarrow{P_0P_1}$  et  $\overrightarrow{P_1P_2}$ .

La seconde courbe présente un rayon de courbure minimal trop faible, à éviter pour deux raisons (limitation de la largeur du rail et de la longueur du véhicule miniature).

Nous proposons donc de déterminer une courbe pour définir la pièce qui soit optimale, au sens où le minimum du rayon de courbure est choisi le plus grand possible

# Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)



Courbe de Bézier d'ordre  $n = 2$ , définie par trois points de contrôle  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ , passant par  $P_0$  et  $P_2$ , dont les dérivées en ces points sont portées par  $\overrightarrow{P_0P_1}$  et  $\overrightarrow{P_1P_2}$ .

La seconde courbe présente un rayon de courbure minimal trop faible, à éviter pour deux raisons (limitation de la largeur du rail et de la longueur du véhicule miniature).

Nous proposons donc de déterminer une courbe pour définir la pièce qui soit optimale, au sens où le minimum du rayon de courbure est choisi le plus grand possible

# Problématique

Reprenons le formalisme du papier historique de Dubins [Dub57] (problème analogue mais non identique, résultat identique).

On se donne  $O$ ,  $A$  et  $B$  trois points deux à deux distincts du plan et  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  deux vecteurs, vérifiant

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{OA} \overrightarrow{AO}, \quad \vec{\beta} = \frac{1}{OB} \overrightarrow{OB}, \quad (1a)$$

et

$$\Omega = \left( \widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} \right) \in ]0, \pi[. \quad (1b)$$

# Énoncé du problème

Nous cherchons une courbe, paramétrée de façon normale par son abscisse curviligne :  $s \in [0, L = L(X)] \mapsto X(s) \in \mathbb{R}^2$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour toute la suite, pour toute telle fonction  $X$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , on notera

$$L = L(X).$$

On note  $\|\cdot\|$  la norme Euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que l'on a

$$\forall s \in [0, L], \quad \|X'(s)\| = 1, \quad (2a)$$

$$X(0) = A, \quad X(L) = B, \quad (2b)$$

$$X'(0) = \vec{\alpha}, \quad X'(L) = \vec{\beta}. \quad (2c)$$

# Énoncé du problème

On supposera que

$$X \in W^{2,\infty}(0, L; \mathbb{R}^2), \quad (3)$$

ce qui permet de définir la valeur absolue de la courbure  $c$  par

$$|c(s)| = \|X''(s)\|, \quad \text{p.p. sur } ]0, L[. \quad (4)$$

La fonction  $X$  est dans  $\mathcal{C}^1([0, L]; \mathbb{R}^2)$ , on a  $X'(s) \neq 0$  et on considère une détermination continue de l'angle  $\phi$  défini par

$$\forall s \in [0, L], \quad \phi(s) = \left( \vec{\alpha}, \widehat{X'(s)} \right). \quad (5)$$

La fonction  $\phi$  est donc dans  $W^{1,\infty}(0, L) \subset \mathcal{C}^0([0, L])$  et on a

$$\frac{d\phi}{ds} = c, \quad \text{p.p. sur } ]0, L[. \quad (6)$$

où ici  $c$  désigne la courbure algébrique.

# Énoncé du problème

On impose alors

$$c \text{ est presque partout positive.} \quad (7)$$

Ainsi, (7) est équivalent à

$$\phi \text{ est croissant.} \quad (8)$$

# Énoncé du problème

Dire que le minimum du rayon de courbure est le plus grand possible revient à dire que le maximum de la valeur absolue de la courbure est le plus petit possible, soit encore, selon (7), que le maximum de la courbure, défini comme  $\|c\|_{L^\infty(0,L)}$  est le plus petit possible.

## Définition

Pour  $O, A$  et  $B$  trois points du plan deux à deux distincts et  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  deux vecteurs vérifiant (1), on définit l'ensemble  $\mathcal{E}$  des courbes  $X$  du plan vérifiant (2), (3), (7) (ou (8)).

Le problème consistera finalement à déterminer une courbe  $X$  de  $\mathcal{E}$  minimisant  $\| \|X''\| \|_{L^\infty(0,L)}$ , c'est-à-dire le sup essentiel de la fonction de  $[0, L]$  dans  $\mathbb{R} : s \mapsto \|X''\| :$

$$\| \|X''\| \|_{L^\infty(0,L)} = \min_{Z \in \mathcal{E}} \| \|Z''\| \|_{L^\infty(0,L)}. \quad (9)$$

# Énoncé du problème

Dire que le minimum du rayon de courbure est le plus grand possible revient à dire que le maximum de la valeur absolue de la courbure est le plus petit possible, soit encore, selon (7), que le maximum de la courbure, défini comme  $\|c\|_{L^\infty(0,L)}$  est le plus petit possible.

## Définition

Pour  $O$ ,  $A$  et  $B$  trois points du plan deux à deux distincts et  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  deux vecteurs vérifiant (1), on définit l'ensemble  $\mathcal{E}$  des courbes  $X$  du plan vérifiant (2), (3), (7) (ou (8)).

Le problème consistera finalement à déterminer une courbe  $X$  de  $\mathcal{E}$  minimisant  $\| \|X''\| \|_{L^\infty(0,L)}$ , c'est-à-dire le sup essentiel de la fonction de  $[0, L]$  dans  $\mathbb{R} : s \mapsto \|X''\| :$

$$\| \|X''\| \|_{L^\infty(0,L)} = \min_{Z \in \mathcal{E}} \| \|Z''\| \|_{L^\infty(0,L)}. \quad (9)$$

# Sommaire

- 1 Contexte et Intérêt
- 2 Énoncé du problème
- 3 Unique courbe de  $\mathcal{E}$  formée d'un segment de droite et d'un arc de cercle**
- 4 Problème de minimisation
- 5 Existence, unicité et caractérisation de la courbe minimisant le maximum de la courbure

# Unique courbe de $\mathcal{E}$ formée d'un segment de droite et d'un arc de cercle

## Lemme

*Il existe une unique courbe  $X$  de  $\mathcal{E}$  formée d'un arc de cercle de longueur non nulle et d'un segment de droite (éventuellement réduit à un point).*

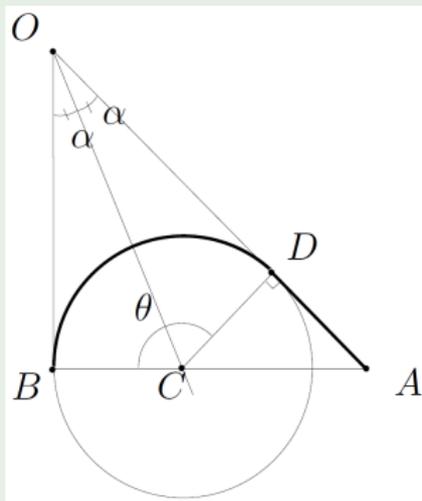
*Pour toute la suite, cette courbe est notée sous la forme  $\mathcal{J}(O, A, B)$ .*

## Démonstration.

Preuve géométrique simple. □

## Exemple

## Exemple



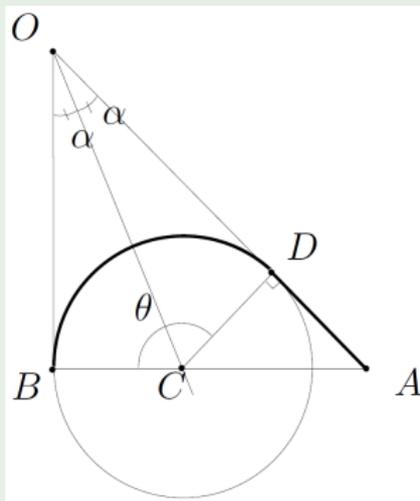
Cas particulier donné par

$A = (1/2, -1/2)$ ,  $O = (0, 0)$ ,  $B = (0, -1/2)$ ,  $\Omega = 3\pi/4$   
(pièce 6 du circuit).

Le rayon de courbure minimal passe de  $1/25 \sqrt{5} \approx 0.089$  à  
 $(\sqrt{2} - 1)/2 \approx 0.207$ .

## Exemple

## Exemple



Cas particulier donné par

$A = (1/2, -1/2)$ ,  $O = (0, 0)$ ,  $B = (0, -1/2)$ ,  $\Omega = 3\pi/4$   
(pièce 6 du circuit).

Le rayon de courbure minimal passe de  $1/25 \sqrt{5} \approx 0.089$  à  
 $(\sqrt{2} - 1)/2 \approx 0.207$ .

# Sommaire

- 1 Contexte et Intérêt
- 2 Énoncé du problème
- 3 Unique courbe de  $\mathcal{E}$  formée d'un segment de droite et d'un arc de cercle
- 4 Problème de minimisation**
- 5 Existence, unicité et caractérisation de la courbe minimisant le maximum de la courbure

# Problème de minimisation

On considère le repère orthonormé  $(A, \vec{\alpha}, \vec{k})$ , et en notant  $X(s) = (x(s), y(s))$ , les coordonnées des points de la courbe  $X$  dans ce repère, on a les relations habituelles

$$\frac{dx}{ds} = \cos \phi, \quad (10a)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \phi. \quad (10b)$$

# Problème de minimisation

Remarquons tout d'abord que, définir  $X \in \mathcal{E}$  revient donc à définir :

- $L > 0$  puis la courbure  $c \in L^\infty(0, L)$ , presque partout positive ;
- l'angle  $\phi \in W^{1,\infty}(0, L)$  grâce à

$$\forall s \in [0, L], \quad \phi(s) = \int_0^s c(u) du, \quad (11a)$$

qui doit vérifier

$$\int_0^L c(u) du = \Omega, \quad (11b)$$

- les fonctions  $x$  et  $y$  de  $W^{2,\infty}(0, L)$  définies respectivement par

$$\forall s \in [0, L], \quad x(s) = \int_0^s \cos \phi(u) du, \quad y(s) = \int_0^s \sin \phi(u) du, \quad (11c)$$

qui doivent vérifier

$$\int_0^L \cos \phi(s) du = x_B, \quad \int_0^L \sin \phi(s) du = y_B. \quad (11d)$$

# Problème de minimisation

Remarquons tout d'abord que, définir  $X \in \mathcal{E}$  revient donc à définir :

- $L > 0$  puis la courbure  $c \in L^\infty(0, L)$ , presque partout positive ;
- l'angle  $\phi \in W^{1,\infty}(0, L)$  grâce à

$$\forall s \in [0, L], \quad \phi(s) = \int_0^s c(u) du, \quad (11a)$$

qui doit vérifier

$$\int_0^L c(u) du = \Omega, \quad (11b)$$

- les fonctions  $x$  et  $y$  de  $W^{2,\infty}(0, L)$  définies respectivement par

$$\forall s \in [0, L], \quad x(s) = \int_0^s \cos \phi(u) du, \quad y(s) = \int_0^s \sin \phi(u) du, \quad (11c)$$

qui doivent vérifier

$$\int_0^L \cos \phi(s) du = x_B, \quad \int_0^L \sin \phi(s) du = y_B. \quad (11d)$$

# Problème de minimisation

Remarquons tout d'abord que, définir  $X \in \mathcal{E}$  revient donc à définir :

- $L > 0$  puis la courbure  $c \in L^\infty(0, L)$ , presque partout positive ;
- l'angle  $\phi \in W^{1,\infty}(0, L)$  grâce à

$$\forall s \in [0, L], \quad \phi(s) = \int_0^s c(u) du, \quad (11a)$$

qui doit vérifier

$$\int_0^L c(u) du = \Omega, \quad (11b)$$

- les fonctions  $x$  et  $y$  de  $W^{2,\infty}(0, L)$  définies respectivement par

$$\forall s \in [0, L], \quad x(s) = \int_0^s \cos \phi(u) du, \quad y(s) = \int_0^s \sin \phi(u) du, \quad (11c)$$

qui doivent vérifier

$$\int_0^L \cos \phi(s) du = x_B, \quad \int_0^L \sin \phi(s) du = y_B. \quad (11d)$$

# Problème de minimisation

On cherche donc à définir  $(L_0, c_0)$  tel que

$$\left\| \|X''_{L_0, c_0}\| \right\|_{L^\infty(0, L_0)} = \min_{(L, c) \text{ vérifiant (11)}} \left\| \|Z''_{L, c}\| \right\|_{L^\infty(0, L)} \quad (12)$$

Nous allons montrer que la solution de ce problème est unique est donnée par  $L_0$  ne dépendant que de  $A$ ,  $B$  et  $O$  et  $c$  donnée par

$$\forall s \in [0, L_0], \quad c(s) = \begin{cases} R_a^{-1} & \text{si } s \in [0, R_a], \\ 0 & \text{si } s \in [R_a, L_0], \end{cases} \quad (13)$$

où  $R_a$  ne dépend que de  $A$ ,  $B$  et  $O$ , cette solution correspondant à la courbe  $\mathcal{J}(O, A, B)$  du lemme 2.

# Problème de minimisation

On cherche donc à définir  $(L_0, c_0)$  tel que

$$\left\| \left\| X''_{L_0, c_0} \right\| \right\|_{L^\infty(0, L_0)} = \min_{(L, c) \text{ vérifiant (11)}} \left\| \left\| Z''_{L, c} \right\| \right\|_{L^\infty(0, L)} \quad (12)$$

Nous allons montrer que la solution de ce problème est unique est donnée par  $L_0$  ne dépendant que de  $A$ ,  $B$  et  $O$  et  $c$  donnée par

$$\forall s \in [0, L_0], \quad c(s) = \begin{cases} R_a^{-1} & \text{si } s \in [0, R_a], \\ 0 & \text{si } s \in [R_a, L_0], \end{cases} \quad (13)$$

où  $R_a$  ne dépend que de  $A$ ,  $B$  et  $O$ , cette solution correspondant à la courbe  $\mathcal{J}(O, A, B)$  du lemme 2.

# Problème de minimisation discret

Dans [Bas19], on a discrétisé le problème précédent de la façon suivante :

- On définit  $c$  constante par morceaux, sur un nombre fini d'intervalles  $[L_i, L_{i+1}]$ .
- Supposons que  $p$  désigne le nombre d'intervalles et que, pour tout  $i \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $c$  est constant et égal à  $1/R_i$  avec  $R_i > 0$ .
- Les inconnues sont alors *a priori*,  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $L > 0$ ,  
 $R = (R_0, \dots, R_{p-1}) \in (\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\})^p$  et  
 $L = (L_0, \dots, L_{p-1}, L_p) \in \mathbb{R}_+^{*p+1}$ , avec  $L_0 = 0$ , qui définissent des fonctions qui doivent vérifier (11b) et (11d).
- La courbe  $X$  est donc constituée d'un nombre fini d'arcs de cercles ou de segments de droite.

# Problème de minimisation discret

Dans [Bas19], on a discrétisé le problème précédent de la façon suivante :

- On définit  $c$  constante par morceaux, sur un nombre fini d'intervalles  $[L_i, L_{i+1}]$ .
- Supposons que  $p$  désigne le nombre d'intervalles et que, pour tout  $i \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $c$  est constant et égal à  $1/R_i$  avec  $R_i > 0$ .
- Les inconnues sont alors *a priori*,  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $L > 0$ ,  
 $R = (R_0, \dots, R_{p-1}) \in (\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\})^p$  et  
 $L = (L_0, \dots, L_{p-1}, L_p) \in \mathbb{R}_+^{*p+1}$ , avec  $L_0 = 0$ , qui définissent des fonctions qui doivent vérifier (11b) et (11d).
- La courbe  $X$  est donc constituée d'un nombre fini d'arcs de cercles ou de segments de droite.

# Problème de minimisation discret

Dans [Bas19], on a discrétisé le problème précédent de la façon suivante :

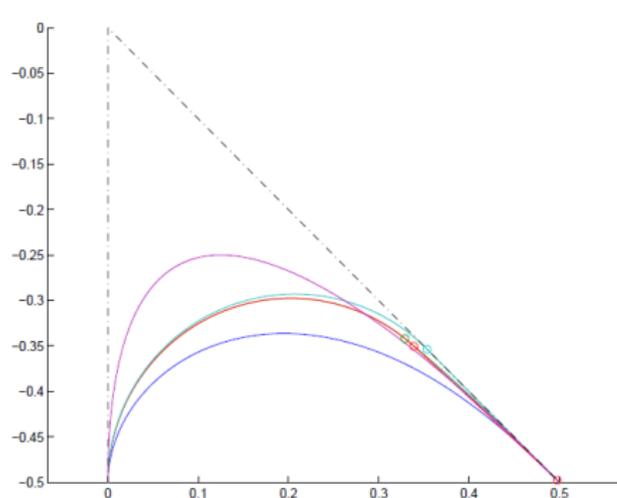
- On définit  $c$  constante par morceaux, sur un nombre fini d'intervalles  $[L_i, L_{i+1}]$ .
- Supposons que  $p$  désigne le nombre d'intervalles et que, pour tout  $i \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $c$  est constant et égal à  $1/R_i$  avec  $R_i > 0$ .
- Les inconnues sont alors *a priori*,  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $L > 0$ ,  
 $R = (R_0, \dots, R_{p-1}) \in (\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\})^p$  et  
 $L = (L_0, \dots, L_{p-1}, L_p) \in \mathbb{R}_+^{*p+1}$ , avec  $L_0 = 0$ , qui définissent des fonctions qui doivent vérifier (11b) et (11d).
- La courbe  $X$  est donc constituée d'un nombre fini d'arcs de cercles ou de segments de droite.

# Problème de minimisation discret

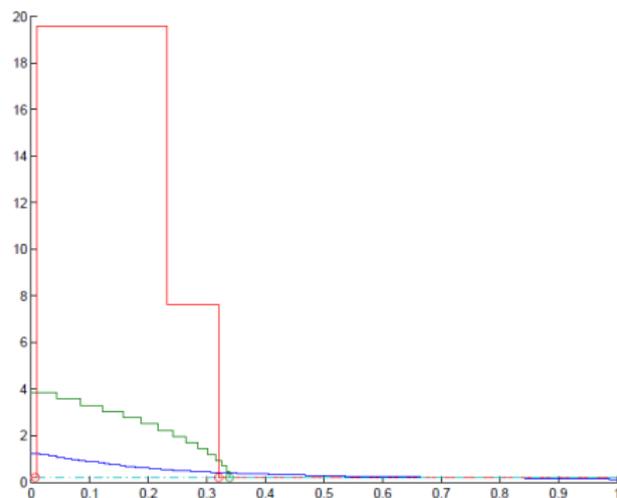
Dans [Bas19], on a discrétisé le problème précédent de la façon suivante :

- On définit  $c$  constante par morceaux, sur un nombre fini d'intervalles  $[L_i, L_{i+1}]$ .
- Supposons que  $p$  désigne le nombre d'intervalles et que, pour tout  $i \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $c$  est constant et égal à  $1/R_i$  avec  $R_i > 0$ .
- Les inconnues sont alors *a priori*,  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $L > 0$ ,  
 $R = (R_0, \dots, R_{p-1}) \in (\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\})^p$  et  
 $L = (L_0, \dots, L_{p-1}, L_p) \in \mathbb{R}_+^{*p+1}$ , avec  $L_0 = 0$ , qui définissent des fonctions qui doivent vérifier (11b) et (11d).
- La courbe  $X$  est donc constituée d'un nombre fini d'arcs de cercles ou de segments de droite.

## Simulation



(a) Courbes



(b) Rayons de courbure

Sur l'exemple 3, on a obtenu la figure ci-dessus. On a y représenté la fonction de départ de la procédure de minimisation en bleu, la solution numérique en vert, une autre solution numérique en rouge, la courbe  $\mathcal{J}(O, A, B)$  en bleu clair et la parabole en violet.

# Simulation

Cette figure met en évidence le fait que les courbes obtenues sont constituées de cercles de grands rayons de courbures, correspondant à la partie rectiligne de la courbe théorique, puis de cercles de rayons très proches du rayon de la partie circulaire.

La courbe présente semble proche donc de l'unique courbe  $\mathcal{J}(O, A, B)$ .

# Simulation

Cette figure met en évidence le fait que les courbes obtenues sont constituées de cercles de grands rayons de courbures, correspondant à la partie rectiligne de la courbe théorique, puis de cercles de rayons très proches du rayon de la partie circulaire.

La courbe présente semble proche donc de l'unique courbe  $\mathcal{J}(O, A, B)$ .

# Sommaire

- 1 Contexte et Intérêt
- 2 Énoncé du problème
- 3 Unique courbe de  $\mathcal{E}$  formée d'un segment de droite et d'un arc de cercle
- 4 Problème de minimisation
- 5 Existence, unicité et caractérisation de la courbe minimisant le maximum de la courbure

# Existence, unicité et caractérisation de la courbe minimisant le maximum de la courbure

On suppose désormais que sont fixés  $O$  et  $A, B$ , deux à deux distincts et  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  vérifiant (1).

## Théorème

*La courbe  $\mathcal{J}(O, A, B)$  donnée dans le lemme 2 est l'unique courbe  $X$  de  $\mathcal{E}$  qui minimise le maximum de la courbure, c'est-à-dire vérifiant (9).*

# Résultat principal (résultat préliminaire)

Avec les notations habituelles, nous supposons, sans perte de généralité que  $OA \leq OB$ , de sorte que la courbe  $X = \mathcal{J}(O, A, B) \in \mathcal{E}$ , de longueur  $L$  décrite dans le lemme 2, commence d'abord par un arc de cercle de rayon  $R_a$ . Notons  $\phi$  l'angle associée à cette courbe. Soit maintenant une autre courbe  $Z \in \mathcal{E}$ , associée à l'angle  $\theta$  et de longueur  $M$ . On note  $e = \|\|Z''\|\|_{L^\infty(0,L)}$  et on suppose que  $e \leq \frac{1}{R_a}$ .

On se place dans le repère orthonormé  $(A, \vec{\alpha}, \vec{k})$  et on note respectivement  $(x(s), y(s))$  et  $(\hat{x}(s), \hat{y}(s))$  les coordonnées de  $X(s)$  et de  $Z(s)$  dans ce repère. On considère la longueur  $l$  de la partie circulaire de la courbe  $X$  définie par  $l = R_a \Omega$ .

# Résultat principal (résultat préliminaire)

Avec les notations habituelles, nous supposons, sans perte de généralité que  $OA \leq OB$ , de sorte que la courbe  $X = \mathcal{J}(O, A, B) \in \mathcal{E}$ , de longueur  $L$  décrite dans le lemme 2, commence d'abord par un arc de cercle de rayon  $R_a$ . Notons  $\phi$  l'angle associée à cette courbe. Soit maintenant une autre courbe  $Z \in \mathcal{E}$ , associée à l'angle  $\theta$  et de longueur  $M$ . On note  $e = \| \| Z'' \| \|_{L^\infty(0,L)}$  et on suppose que  $e \leq \frac{1}{R_a}$ .

On se place dans le repère orthonormé  $(A, \vec{\alpha}, \vec{k})$  et on note respectivement  $(x(s), y(s))$  et  $(\hat{x}(s), \hat{y}(s))$  les coordonnées de  $X(s)$  et de  $Z(s)$  dans ce repère. On considère la longueur  $l$  de la partie circulaire de la courbe  $X$  définie par  $l = R_a \Omega$ .

## Résultat principal(résultat préliminaire)

## Lemme

*Sous l'hypothèse*

$$\Omega \in ]0, \pi/2[, \quad (14)$$

*alors on a  $M \geq l$  et on peut donc poser :*

$$\zeta_0 = -(\widehat{x}(l) - x(l)) \sin(\phi(l)) + (\widehat{y}(l) - y(l)) \cos(\phi(l)) ; \quad (15a)$$

*on a :*

$$\zeta_0 \leq 0, \quad (15b)$$

$$e < \frac{1}{R_a} \implies \zeta_0 < 0, \quad (15c)$$

$$\zeta_0 = 0 \implies \left( e = \frac{1}{R_a}, \quad M = L, \quad Z = X \right). \quad (15d)$$

# Résultat principal (résultat préliminaire, idée de la preuve)

Géométriquement,  $\zeta_0$  correspond à

$$\zeta(s) = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(\phi(s)) \\ \cos(\phi(s)) \end{pmatrix}, \overrightarrow{X(s)Z(s)} \right\rangle,$$

pour  $s \in I$ , où, sur la partie circulaire de la courbe  $X$  :

$$\begin{pmatrix} -\sin(\phi(s)) \\ \cos(\phi(s)) \end{pmatrix} = \sigma(X'(s)) = \vec{N}(s),$$

où  $\sigma$  est la rotation vectorielle d'angle  $\pi/2$  et  $\vec{N}(s)$  désigne la normale extérieure à la courbe  $X$  au point d'abscisse curviligne  $S$ .

Ainsi,  $\zeta(s)$  désigne la composante du vecteur  $\overrightarrow{X(s)Z(s)}$  sur  $\vec{N}(s)$ .

## Résultat principal (résultat préliminaire, idée de la preuve)

Géométriquement,  $\zeta_0$  correspond à

$$\zeta(s) = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(\phi(s)) \\ \cos(\phi(s)) \end{pmatrix}, \overrightarrow{X(s)Z(s)} \right\rangle,$$

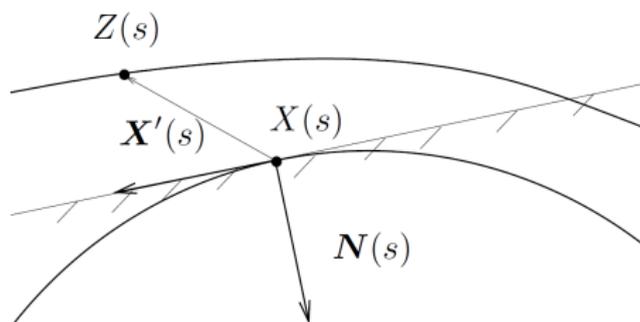
pour  $s = l$ , où, sur la partie circulaire de la courbe  $X$  :

$$\begin{pmatrix} -\sin(\phi(s)) \\ \cos(\phi(s)) \end{pmatrix} = \sigma(X'(s)) = \vec{N}(s),$$

où  $\sigma$  est la rotation vectorielle d'angle  $\pi/2$  et  $\vec{N}(s)$  désigne la normale extérieure à la courbe  $X$  au point d'abscisse curviligne  $S$ . Ainsi,  $\zeta(s)$  désigne la composante du vecteur  $\overrightarrow{X(s)Z(s)}$  sur  $\vec{N}(s)$ .

# Résultat principal (résultat préliminaire, idée de la preuve)

Nous allons étudier le signe de  $\zeta(s)$  est montrer que  $\zeta(s)$  est négatif, ce qui signifie que la courbe  $Z$  est toujours dans le demi-plan défini par la tangente à courbe  $X$ , du côté opposé à la normale.



# Résultat principal (résultat préliminaire, idée de la preuve)

On a les relations habituelles

$$\frac{dx}{ds} = \cos \phi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \phi, \quad (16a)$$

$$\frac{d\hat{x}}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{d\hat{y}}{ds} = \sin \theta. \quad (16b)$$

On montre tout d'abord que

$$\forall s \in [0, l], \quad \theta(s) - \phi(s) \leq \left( e - \frac{1}{R_a} \right) s.$$

Ensuite, grâce à (10), on montre que, pour tout  $s \in [0, l]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\hat{x}(s) - x(s)) &= -2 \sin \left( \frac{\theta(s) + \phi(s)}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta(s) - \phi(s)}{2} \right), \\ \frac{d}{ds} (\hat{y}(s) - y(s)) &= 2 \cos \left( \frac{\theta(s) + \phi(s)}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta(s) - \phi(s)}{2} \right), \end{aligned}$$

# Résultat principal (résultat préliminaire, idée de la preuve)

On a les relations habituelles

$$\frac{dx}{ds} = \cos \phi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \phi, \quad (16a)$$

$$\frac{d\hat{x}}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{d\hat{y}}{ds} = \sin \theta. \quad (16b)$$

On montre tout d'abord que

$$\forall s \in [0, l], \quad \theta(s) - \phi(s) \leq \left( e - \frac{1}{R_a} \right) s.$$

Ensuite, grâce à (10), on montre que, pour tout  $s \in [0, l]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\hat{x}(s) - x(s)) &= -2 \sin \left( \frac{\theta(s) + \phi(s)}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta(s) - \phi(s)}{2} \right), \\ \frac{d}{ds} (\hat{y}(s) - y(s)) &= 2 \cos \left( \frac{\theta(s) + \phi(s)}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta(s) - \phi(s)}{2} \right), \end{aligned}$$

## Résultat principal (résultat préliminaire, idée de la preuve)

On montre ensuite

$$\forall s \in ]0, l], \quad \zeta(s) \leq 0,$$

et

$$e < \frac{1}{R_a} \implies \forall s \in ]0, l], \quad \zeta(s) < 0.$$

En particulier, en  $s = l$ , on obtient (15b) et (15c). Enfin, grâce aux hypothèses (8) et (14), on obtient la monotonie des fonctions  $\hat{x}(s) - x(s)$  et  $\hat{y}(s) - y(s)$ , ainsi que leur signe constant.

## Résultat principal (résultat préliminaire, idée de la preuve)

On montre ensuite

$$\forall s \in ]0, l], \quad \zeta(s) \leq 0,$$

et

$$e < \frac{1}{R_a} \implies \forall s \in ]0, l], \quad \zeta(s) < 0.$$

En particulier, en  $s = l$ , on obtient (15b) et (15c). Enfin, grâce aux hypothèses (8) et (14), on obtient la monotonie des fonctions  $\hat{x}(s) - x(s)$  et  $\hat{y}(s) - y(s)$ , ainsi que leur signe constant.

# Résultat principal (résultat préliminaire, idée de la preuve)

La nullité de  $\zeta_0$  impose  $\hat{x}(l) - x(l) = \hat{y}(l) - y(l) = 0$  et la monotonie de  $\hat{x} - x$  et  $\hat{y} - y$  impose donc leur nullité sur tout l'intervalle  $[0, l]$ .

On en déduit que  $\phi$  et  $\theta$  coïncident sur  $[0, l]$  puis sur  $[0, M]$  et il en est de même pour  $x$  et  $\hat{x}$  et  $y$  et  $\hat{y}$ , en particulier en  $s = M$  où  $x$  et  $y$  valent  $x_B$  et  $y_B$ . Les deux courbes  $X$  et  $Z$  finissent donc au même point  $B$  et donc  $L = M$  et  $X = Z$ . On en déduit alors  $e = 1/R_a$ .

## Résultat principal (résultat préliminaire, idée de la preuve)

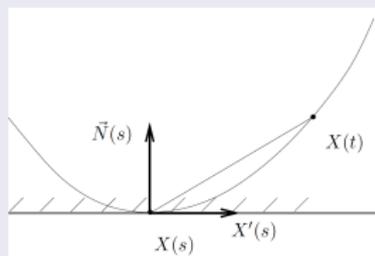
La nullité de  $\zeta_0$  impose  $\hat{x}(l) - x(l) = \hat{y}(l) - y(l) = 0$  et la monotonie de  $\hat{x} - x$  et  $\hat{y} - y$  impose donc leur nullité sur tout l'intervalle  $[0, l]$ .

On en déduit que  $\phi$  et  $\theta$  coïncident sur  $[0, l]$  puis sur  $[0, M]$  et il en est de même pour  $x$  et  $\hat{x}$  et  $y$  et  $\hat{y}$ , en particulier en  $s = M$  où  $x$  et  $y$  valent  $x_B$  et  $y_B$ . Les deux courbes  $X$  et  $Z$  finissent donc au même point  $B$  et donc  $L = M$  et  $X = Z$ . On en déduit alors  $e = 1/R_a$ .

# Résultat principal (autre résultat préliminaire)

## Lemme

Soit une courbe  $X$  vérifiant (1b), (2), (3) et (8) alors, pour tout  $s \in [0, L]$ , la courbe est incluse dans le demi-plan délimitée par la droite tangente à la courbe au point  $X(s)$ , du côté de  $\vec{N}(s)$ , la normale extérieure à la courbe en  $X(s)$ .



## Démonstration.

Courbe convexe, conséquence de la croissance de  $\phi$ . □

## Résultat principal (Idée de la preuve)

Notons tout d'abord que  $\inf_{Z \in \mathcal{E}} \| \| X'' \| \|_{L^\infty(0, L(X))}$  existe, puisque  $\mathcal{E}$  est non vide et que  $\| \| Z'' \| \|_{L^\infty(0, L(X))}$  est toujours positif.

# Résultat principal (Idée de la preuve dans le cas (14))

Pour toute la suite, on considère la fonction  $g$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par

$$\forall X \in \mathcal{E}, \quad g(X) = \left\| \|X''\| \right\|_{L^\infty(0, L(X))}. \quad (17)$$

On a exhibé dans le lemme 2 une fonction  $X = \mathcal{J}(O, A, B)$  de  $\mathcal{E}$  vérifiant  $g(X) = 1/R_a$ . On a donc  $\inf_{Z \in \mathcal{E}} g(Z) \leq 1/R_a$ .

# Résultat principal (Idée de la preuve dans le cas (14))

Pour montrer que le minimum de  $g$  est atteint est vaut  $1/R_a$ , l'idée simple est de démontrer que si la courbure maximale d'une courbe est trop faible alors  $\zeta_0$  est négatif, ce qui contredit son aspect convexe (lemme 6). S'il existe une courbe de  $\mathcal{E}$  notée  $Z$  telle que  $g(Z) < 1/R_a$ , d'après le lemme 5, on a donc  $\zeta_0 < 0$ .

Il existe donc un point de la courbe  $Z$  ( $l$ ) de  $Z$  dans le demi-plan ouvert  $\Pi$  défini par la tangente à la courbe  $X$ , notée  $\mathcal{D}$  au point d'abscisse curviligne  $l$ , du côté opposé à la normale. Cela contredit l'appartenance de la courbe  $Z$  à  $\mathcal{E}$  (lemme 6). On a donc

$$\inf_{Z \in \mathcal{E}} g(Z) = g(X) = \min_{Z \in \mathcal{E}} g(Z) = \frac{1}{R_a}.$$

# Résultat principal (Idée de la preuve dans le cas (14))

Pour montrer que le minimum de  $g$  est atteint est vaut  $1/R_a$ , l'idée simple est de démontrer que si la courbure maximale d'une courbe est trop faible alors  $\zeta_0$  est négatif, ce qui contredit son aspect convexe (lemme 6). S'il existe une courbe de  $\mathcal{E}$  notée  $Z$  telle que  $g(Z) < 1/R_a$ , d'après le lemme 5, on a donc  $\zeta_0 < 0$ .

Il existe donc un point de la courbe  $Z(l)$  de  $Z$  dans le demi-plan ouvert  $\Pi$  défini par la tangente à la courbe  $X$ , notée  $\mathcal{D}$  au point d'abscisse curviligne  $l$ , du côté opposé à la normale. Cela contredit l'appartenance de la courbe  $Z$  à  $\mathcal{E}$  (lemme 6). On a donc

$$\inf_{Z \in \mathcal{E}} g(Z) = g(X) = \min_{Z \in \mathcal{E}} g(Z) = \frac{1}{R_a}.$$

# Résultat principal (Idée de la preuve dans le cas (14))

Montrons enfin l'unicité de la courbe  $X$  vérifiant (9) en montrant que cette courbe est la courbe  $\mathcal{J}(O, A, B)$  donnée dans le lemme 2. On utilise là encore le lemme 5. Supposons qu'il existe une autre courbe  $Z$  de  $\mathcal{E}$  telle que  $g(Z) = 1/R_a$ .

D'après le lemme 6 appliqué à cette courbe  $Z$  et à la droite  $\mathcal{D}$ , la tangente à la courbe  $Z$  au point  $B$ , on a donc  $\zeta_0 \geq 0$ . D'après le lemme 5, on a  $\zeta_0 \leq 0$  et donc  $\zeta_0 = 0$  et on a alors, en utilisant de nouveau ce même lemme,  $Z = X$ .

# Résultat principal (Idée de la preuve dans le cas (14))

Montrons enfin l'unicité de la courbe  $X$  vérifiant (9) en montrant que cette courbe est la courbe  $\mathcal{J}(O, A, B)$  donnée dans le lemme 2.

On utilise là encore le lemme 5. Supposons qu'il existe une autre courbe  $Z$  de  $\mathcal{E}$  telle que  $g(Z) = 1/R_a$ .

D'après le lemme 6 appliqué à cette courbe  $Z$  et à la droite  $\mathcal{D}$ , la tangente à la courbe  $Z$  au point  $B$ , on a donc  $\zeta_0 \geq 0$ . D'après le lemme 5, on a  $\zeta_0 \leq 0$  et donc  $\zeta_0 = 0$  et on a alors, en utilisant de nouveau ce même lemme,  $Z = X$ .

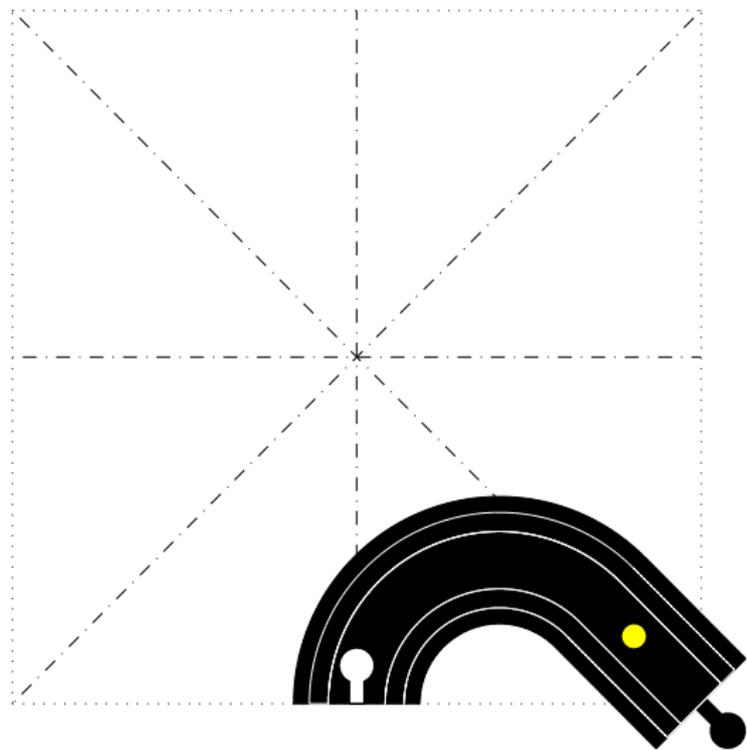
## Résultat principal (Idée de la preuve sans (14))

Nous décomposons le problème en deux sous-problèmes.

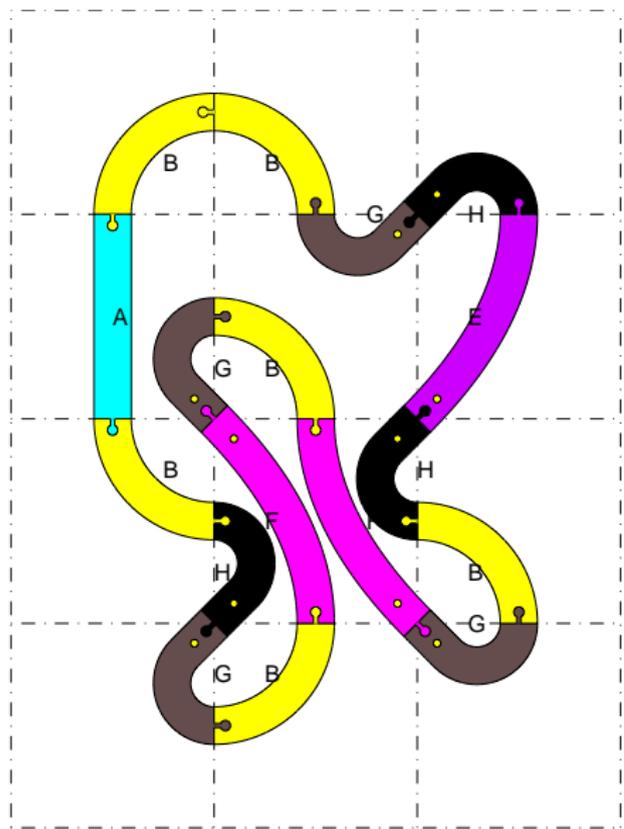
## Résultat principal (Preuve complète)

Quelques résultats dans [J. Bastien](#). *Existence d'une courbe à courbure positive maximisant le minimum du rayon de courbure – "Observation numérique"*. 2019. [arXiv : 1906.10010](#).  
Les autres soumis aux CRAS de maths.

# Construction effective de la pièce du circuit



# Exemple d'un circuit



# Conclusion

Deux questions restent en suspens :

- L'unique courbe minimisante  $\mathcal{J}$  trouvée constitue un cas particulier des courbes de Dubins. Cependant, autant dans la formulation du problème que sa résolution, ce résultat semble différent des célèbres travaux de Dubins. Fondamentalement, pourquoi, pour  $R = R_a$  donné, chercher une courbe, de rayon de courbure supérieur à  $R_a$  donne le même résultat que chercher une courbe, à courbure positive, à maximum du rayon de courbure minimal ?
- Résultat en utilisant la forme du problème de minimisation (12).

# Conclusion

Deux questions restent en suspens :

- L'unique courbe minimisante  $\mathcal{J}$  trouvée constitue un cas particulier des courbes de Dubins. Cependant, autant dans la formulation du problème que sa résolution, ce résultat semble différent des célèbres travaux de Dubins. Fondamentalement, pourquoi, pour  $R = R_a$  donné, chercher une courbe, de rayon de courbure supérieur à  $R_a$  donne le même résultat que chercher une courbe, à courbure positive, à maximum du rayon de courbure minimal ?
- Résultat en utilisant la forme du problème de minimisation (12).



J. Bastien. "Circuit apte à guider un véhicule miniature".  
FR2990627. Université Lyon I. Brevet publié sur le site de l'INPI  
<http://bases-brevets.inpi.fr/fr/document/FR2990627.html?p=6&s=1423127185056&cHash=> Voir [Bas13]. 15 mai 2012.



J. Bastien. "Circuit suitable for guiding a miniature vehicle [Circuit apte à guider un véhicule miniature]". WO2013171170.  
Université Lyon I. Demande internationale publiée en vertu du traité de coopération en matière de brevets (PCT). Voir  
<http://bases-brevets.inpi.fr/fr/document/WO2013171170.html?p=6&s=1423127405077&cHash=>. 13 mai 2013.



J. Bastien. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ?*. Transparents présentés lors du Forum des mathématiques 2015 à l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon, disponibles sur le web : [http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/expose\\_forum\\_2015.pdf](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_forum_2015.pdf). 2015. 73 pages.



J. Bastien. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ? – Deux questions d'algèbre et de dénombrement*. Transparents présentés au « séminaire détente » de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique, Lyon, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez->

[alice.fr/recherche/brevet\\_rail/expose\\_MMI\\_2015.pdf](http://alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_MMI_2015.pdf). 2015.  
80 pages.



J. Bastien. *Atelier Maths C2+ : Circuits de trains et paraboles.*  
MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web :  
[http://utbmjb.chez-  
alice.fr/MathC2+/parabole\\_circuit\\_train.pdf](http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/parabole_circuit_train.pdf). 2016.  
32 pages.



J. Bastien. *Construction and enumeration of circuits capable of  
guiding a miniature vehicle.* 2016. arXiv : 1603.08775.



J. Bastien. "Construction and enumeration of circuits capable of  
guiding a miniature vehicle". In : *Recreat. Math. Mag.* 3.6 (2016).  
Disponible sur  
<http://rmm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1163>,  
pages 5–42. doi : 10.1515/rmm-2016-0006.



J. Bastien. *Divers aspects mathématiques d'un circuit de train  
extensible et modulaire.* Atelier-conférence aux journées 2016 de  
l'APMEP, Lyon, disponibles sur le web :  
[http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/  
circuit\\_rail\\_apmep\\_2016.pdf](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/circuit_rail_apmep_2016.pdf). 2016. 15 pages.



J. Bastien. *Existence d'une courbe à courbure positive maximisant le minimum du rayon de courbure – "Observation numérique"*.  
2019. arXiv : 1906.10010.



L. E. Dubins. "On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents". In : *Amer. J. Math.* 79 (1957), pages 497–516.